中級計量経済学練習問題（１）

以下の問いに答えなさい。提出は 11 月 19 日（火）の授業時 (中間試験) までとする。

１．回帰モデル

$$y_i \quad = \quad \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad E(\epsilon_i|x_i) = 0,\ E(\epsilon_i^2|x_i) = \sigma^2$$

から無作為標本 $(y_1, x_1), \cdots, (y_{100}, x_{100})$ が得られたとする。また、それらについて、

$$\sum_{i=1}^{100} y_i = 100, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i = 200$$

$$\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 1700, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 800, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 400$$

であったとする。

(i) y, x の相関係数を求めなさい。
(ii) (α, β) の最小二乗推定量 (a, b) を求めなさい。
(iii) σ^2 の不偏推定量 s^2 を求めなさい。
(iv) 帰無仮説 $\beta = 0$ を有意水準 5%で両側検定しなさい。
(v) この回帰の決定係数 R^2 を求めなさい。

２．$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ から無作為標本 $(Y_i, X_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ が得られたとする。最小二乗法によって β_0, β_1 を推定した結果を $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ とする。Y_i の予測値を $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ とし、残差を $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ とする。

(i) 最小二乗法の一階の条件を用いて、$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i$ と $\sum_{i=1}^{n} X_i \hat{u}_i$ を求めなさい。
(ii) $Y_i - \bar{Y} = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})$ と分解して、(i) の結果を用いて

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

が成り立つことを示しなさい。
(iii) その結果、$0 \le R^2 \le 1$ であることを示しなさい。

３．本当の関係が $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i,\ E(\epsilon_i|X_i) = 0$ であるにも関わらず、定数項 β_0 を含めない回帰モデル $Y_i = \beta_1 X_i + u_i$ を用いて最小二乗推定を行ってしまったとする。

i) この最小二乗法の目的関数は $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_i)^2$ であることに注意して、推定量 $\hat{\beta}_1$ を求めなさい。
ii) $\hat{\beta}_1$ が β_1 の不偏推定量であるかどうか調べなさい。

４．$Y,\ X,\ Z,\ u$ をすべてスカラー確率変数とし、次のモデルを考える。

$$Y = \alpha + \beta X + u,\ E(uX) = \delta \neq 0,\ E(uZ) = 0,\ Var(X) = \sigma_X^2,\ Cov(Z, X) = \sigma_{ZX},\ Var(Z) = \sigma_Z^2$$

上のモデルから無作為標本 $(Y_1, X_1, Z_1), \cdots, (Y_n, X_n, Z_n)$ を得たとする。
i) $Y = \alpha + \beta X + u$ に最小二乗法を適用したとき、α, β のＯＬＳ推定量のバイアスを求めなさい。
ii) Z が操作変数であるために必要な条件を述べなさい。

iii) 上で述べた条件に基づいて操作変数推定量を導出し、それが一致性を持つことを示しなさい。
iv) $E(u^2|Z) = \sigma^2$ の意味で分散均一であったとする。操作変数推定量の漸近分布を導出しなさい。

５．回帰モデル

$$Y_i \quad = \quad \alpha + \beta X_i + \epsilon_i, \quad E(\epsilon_i|X_i) = 0,\ E(\epsilon_i^2|X_i) = \sigma^2$$

から無作為標本 $(Y_1, X_1), \cdots, (Y_n, X_n)$ が得られたとする。最小二乗法を用いればパラメータ α, β を一致推定できる。そのような状況で操作変数を用いるとどのような結果になるか、考えてみよう。適切な操作変数 Z_i が得られたとする。

(i) β の操作変数推定量 $\tilde{\beta}$ は一致性を持つことを示しなさい。

(ii) $\tilde{\beta}$ の漸近分布を求めなさい。

(iii) $E(\epsilon_i^2|Z_i) = \sigma^2$、$Var(X_i) = \sigma_{xx}$ として β の OLS 推定量 $\hat{\beta}$ の漸近分散を求めなさい。$\tilde{\beta}$ と $\hat{\beta}$ の漸近分散を比較して、後者の方が小さいことを示しなさい。