中級計量経済学・応用計量経済学宿題（2）

問 1 - 8 を解きなさい。提出は 1 月 9 日（火）の試験時。

１．ある市場で成立する価格と数量のデータが得られたときに、価格を被説明変数、数量を説明変数とする回帰分析を行った時に何が起こるか考えてみよう。

市場均衡が次のような連立方程式モデルで与えられるとする。

$$
\begin{aligned}
\text{需要関数：} \quad p = & \quad \gamma_0 - \gamma_1 q + u \\
\text{供給関数：} \quad p = & \quad \delta_0 + \delta_1 q + v
\end{aligned}
$$

p, q は価格と数量、u, v は需要と供給のショックである。$E(u) = E(v) = 0$、$Var(u) = \sigma_u^2, Var(v) = \sigma_v^2$, $Cov(u, v) = 0$ とする。 このシステムから無作為標本 $(p_i, q_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ が与えられたとき、p を被説明変数、q を説明変数とする回帰モデル $p_i = \beta_0 + \beta_1 q_i + \epsilon_i$ を推定するとどうなるか考えてみよう。

i) 需給の連立方程式を (p, q) について解きなさい。

ii) それを用いて、(p_i, q_i) の標本平均と標本分散、標本共分散がどのような値に収束するか、調べなさい。

iii) 最小二乗推定量 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ はどのような値に収束するか？その結果についてわかることを述べなさい。

iv) 需要関数のパラメータ γ_0, γ_1 を一致推定したいとしよう。どのような追加的な変数があれば、どのようにして推定できるか述べなさい。

２．以下の回帰モデルを考える。

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + u_i,\ \ E(u_i | x_i^*) = 0$$

x_i^* 自身のデータはないが、観測誤差のあるデータ $x_i = x_i^* + v_i$ が入手できるとする。そのとき、x_i^* の代わりに x_i を用いることにして、無作為標本 $(y_1, x_1), \cdots, (y_n, x_n)$ に最小二乗法を適用することが自然だと思われる。しかし、これは実際にはうまく機能せず、バイアスが生ずる。$\hat{\beta}_1$ のバイアスを求めなさい。ただし、$Cov(x_i^*, v_i) = Cov(u_i, v_i) = 0$ とする。

３．x,y をそれぞれスカラーの確率変数とする。定数項が 0 の線形モデル

$$y = \beta x + u$$

を考える。ただし、誤差項 u は $E(u) = 0$ であるが、x と相関をもつ可能性があり、$E(ux) = \delta$ とする（$\delta = 0$ なら x は外生変数であり、そうでなければ内生変数である）。また、$Var(x) = \sigma_x^2$ とする。x に対する適切なスカラーの操作変数 z があり、$E(z) = 0, Var(z) = \sigma_z^2, Cov(x, z) = \sigma_{xz}$ で、u は分散均一、つまり $E(u^2 | z) = \sigma_u^2$ であるとする。このモデルから無作為標本 $(y_1, x_1, z_1), \cdots, (y_n, x_n, z_n)$ を得るものとする。

i) 最小二乗法による β の推定量を $\hat{\beta}_{OLS}$ として、漸近的なバイアス（$plim\, \hat{\beta}_{OLS} - \beta$）がゼロとなる条件を求めなさい。

上のモデルから $n = 100$ の無作為標本が得られて、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{100} x_i = 10 \quad , \quad \sum_{i=1}^{100} z_i = 10, \\
&\sum_{i=1}^{100} y_i x_i = 40 \quad , \quad \sum_{i=1}^{100} y_i z_i = 100 \ , \ \sum_{i=1}^{100} x_i z_i = 100, \\
&\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 120 \quad , \quad \sum_{i=1}^{100} z_i^2 = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 80,
\end{aligned}
$$

であったとする。

ii) β の OLS 推定量 $\hat{\beta}_{OLS}$ を求めなさい。

iii) その結果を用いて、$\beta = 1$ を有意水準５％で両側検定しなさい。x と u の相関の可能性は無視してよい。

iv) β の IV 推定量 $\hat{\beta}_{IV}$ を求めなさい。

v) x と u に相関があるかどうか、Hausman 検定によって有意水準５％で調べなさい。ただし、σ_u^2 の推定には、OLS 推定の残差二乗の平均、つまり $\hat{u}_i = y_i - x_i\hat{\beta}_{OLS}$ として $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$ を用いなさい。

HP（http://www.nishiyama.kier.kyoto-u.ac.jp/jyugyo2017.html）から data2（エクセルファイル）をダウンロードして、次の問題を解きなさい。シート１，２を問４で、シート３を問７で用いる。

４．次のパネルモデルから、データ $(y_{it}, x_{it}),\ i = 1, 2, \cdots, 100,\ t = 1, 2$ が得られた。

$$y_{it} = \alpha_i + \beta x_{it} + \epsilon_{it}$$

ただし、x_{it} はすべての i, t について iid である。また、ϵ_{it} はすべての i, t について互いに独立で、$X = \{x_{it}\}_{i=1,\cdots,100,t=1,2}$、$\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1,\cdots,100}$ として、$E(\epsilon_{it}|\alpha, X) = 0$、$Var(\epsilon_{it}|\alpha, X) = \sigma^2$ であるとする。そのデータが data2(excel) のシート１，２である。シート１は $y_{it},\ i = 1, 2, \cdots, 100,\ t = 1, 2$、シート２は $x_{it},\ i = 1, 2, \cdots, 100,\ t = 1, 2$ のデータである。

(i) このデータを用いて、固定効果 α_i を考慮せずに以下のモデルに最小二乗推定を適用して $\hat{\beta}^{OLS}$ を計算しなさい。

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + \epsilon_{it}$$

(ii) このデータに固定効果変換を施し、それを用いて β の固定効果推定値 $\hat{\beta}^{FE}$ を計算しなさい。
(iii) $\hat{\beta}^{FE}$ の分散を推定しなさい。
(iv) 帰無仮説 $\beta = 0$ を有意水準５％で両側検定しなさい。

５．歪んだコインがあって、表が出る確率が p、裏が出る確率が $1 - p$ とする。このコインを投げて、表なら $Y = 1$、裏なら $Y = 0$ とする。これを n 回繰り返した結果を $(y_1, \cdots, y_n)$ とする。その時、
i) p に関する尤度関数と対数尤度関数を導出しなさい。
ii)　一階の条件と二階の条件を導出し、p の最尤推定量を求めなさい。

６．以下の probit モデルを考える。

$$y_i = \begin{cases} 1, & \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \geq 0 \\ 0, & \alpha + \beta x_i + \epsilon_i < 0 \end{cases}$$

ただし、$\epsilon_i | x_i \sim iidN(0, 1)$ である。$N(0, 1)$ の分布関数を $\Phi(x)$ とする。
(i) 回帰関数 $E(y_i|x_i)$ を求めなさい。
(ii) $u_i = y_i - E(y_i|x_i)$ として、$Var(u_i|x_i)$ を求めなさい。
(iii) このモデルから無作為標本 $(x_i, y_i) i = 1, 2, \cdots, n$ が与えられたときに、$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + v_i$ というモデルを用いて最小二乗推定を行った時、α_1 のＯＬＳ推定量は何に確率収束するか？また、その絶対値は $1/\sqrt{Var(x)}$ を超えないことを示しなさい（ヒント：コーシー＝シュワルツの不等式を用いる）。

７．data2(excel) のシート３のデータは、AR(1) モデル $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + u_t$、$u_t \sim i.i.d.(0, \sigma^{2)}$ から発生させたデータである。
(i) y_t の平均値を求めなさい。
(ii) 自己共分散 $\gamma_j,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$ を推定しなさい。
(iii) 自己相関係数 $\rho_j,\ j = 1, 2, 3, 4$ を推定しなさい。
(iv) α_0, α_1 を推定しなさい。
(v) σ^2 を推定しなさい。
(vi) $y_{101}, y_{102}, y_{103}$ の予測値を計算しなさい。

８．期待値が 0 の定常な AR(2) モデル

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$$

を考える。ただし、$u_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$ とする。

(i) モデルの両辺に u_t をかけて期待値を取り、$E(y_t u_t)$ を求めなさい。

(ii) 両辺にそれぞれ、$y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}$ をかけて期待値を取り、自己共分散 $\gamma_j,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$ を求めなさい。

(iii) AR(2) モデルが定常であるための条件（講義ノートの p.3 参照）を導出しなさい。