

## 中級計量経済学・応用計量経済学宿題（1）

以下の問いに答えなさい。提出は11月27日（金）の授業時までとする。

### 1. 回帰モデル

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad E(\epsilon_i|x_i) = 0, \quad E(\epsilon_i^2|x_i) = \sigma^2$$

から無作為標本  $(y_1, x_1), \dots, (y_{100}, x_{100})$  が得られたとする。また、それらについて、

$$\sum_{i=1}^{100} y_i = 100, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i = 200$$

$$\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 1700, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 800, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 400$$

であったとする。

- (i)  $y, x$  の相関係数を求めなさい。
- (ii)  $(\alpha, \beta)$  の最小二乗推定量  $(a, b)$  を求めなさい。
- (iii)  $\sigma^2$  の不偏推定量  $s^2$  を求めなさい。
- (iv) 帰無仮説  $\beta = 1$  を有意水準 10% で両側検定しなさい。
- (v) この回帰の決定係数  $R^2$  を求めなさい。

2.  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$  から無作為標本  $(Y_i, X_i), i = 1, 2, \dots, n$  が得られたとする。最小二乗法によって  $\beta_0, \beta_1$  を推定した結果を  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  とする。 $Y_i$  の予測値を  $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$  とし、残差を  $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$  とする。

- (i) 最小二乗法の一次の条件を用いて、 $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i$  と  $\sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i$  を求めなさい。
- (ii)  $Y_i - \bar{Y} = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})$  と分解して、

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

が成り立つことを示しなさい。

- (iii) その結果、 $0 \leq R^2 \leq 1$  であることを示しなさい。

3. 必要な説明変数を含めない時に生ずるバイアスについて、以下の問題に答えなさい。

- (i) 本当は定数項が 0 でないにも関わらず、定数項を含めずに

$$\min_b \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 X_i)^2$$

によって最小二乗推定を行ってしまう場合を考えよう。その場合の  $\hat{\beta}_1$  を求めなさい。その期待値を計算し、バイアスを求めなさい。

(ii) 本当の関係が  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \epsilon_i, E(\epsilon_i|X_i, Z_i) = 0$  であるにも関わらず、 $Z_i$  を含めない回帰モデル  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$  を用いて、最小二乗推定を行ってしまったとする。 $E(X) = \mu_X, E(Z) = \mu_Z, Var(X) = \sigma_X^2, Var(Z) = \sigma_Z^2, Cov(X, Z) = \sigma_{XZ}$  とする。講義ノートに書かれているように、 $Cov(X, Z) \neq 0$  なら、欠落変数バイアスが生ずる。 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$  それぞれについて、バイアスを上

の期待値、分散、共分散を用いて表しなさい。その結果、どのような場合にバイアスが大きくなるか述べなさい。

4. 二項変数を説明変数とする回帰モデル

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

において最小二乗推定量を  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$  とする。 $\bar{Y}^0$  と  $\bar{Y}^1$  をそれぞれ、 $D$  が 0 の個体のデータのみから計算した  $Y$  の平均、 $D$  が 1 の個体のデータのみから計算した  $Y$  の平均とする。そのとき、 $\hat{\beta}_1 = \bar{Y}^1 - \bar{Y}^0$  が成り立つことを示しなさい。

5.  $Y, X, Z, u$  をすべてスカラー確率変数とし、次のモデルを考える。

$$Y = \alpha + \beta X + u, \quad E(uX) = \delta \neq 0, \quad E(uZ) = 0, \quad Cov(Z, X) = \sigma_{ZX}, \quad Var(Z) = \sigma_Z^2$$

上のモデルから無作為標本  $(Y_1, X_1, Z_1), \dots, (Y_n, X_n, Z_n)$  を得たとする。

- i)  $Y = \alpha + \beta X + u$  に最小二乗法を適用したとき、 $\alpha, \beta$  の OLS 推定量のバイアスを求めなさい。
- ii)  $Z$  が操作変数であるために必要な条件を述べなさい。
- iii) 上で述べた条件に基づいて操作変数推定量を導出し、それが一致性を持つことを示しなさい。