中級計量経済学・応用計量経済学宿題（2）

問１-４を解きなさい。提出は１月 13 日（火）の授業時までとする。問５，６は、まだ授業で扱っていない範囲の問題です。宿題として提出する必要はありませんが、期末試験の準備に使ってください。

１．次のような市場均衡を考える連立方程式を考える。

$$\begin{aligned} \text{需要関数：}\quad p =&\quad \gamma_0 - \gamma_1 q + u \\ \text{供給関数：}\quad p =&\quad \delta_0 + \delta_1 q + v \end{aligned}$$

p, q は価格と数量、u, v は需要と供給のショックである。$E(u) = E(v) = 0$、$Var(u) = \sigma_u^2, Var(v) = \sigma_v^2$, $Cov(u, v) = \sigma_{uv}$ とする。 このシステムから無作為標本 $(p_i, q_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ が与えられ、p を被説明変数、q を説明変数とする回帰モデル $p_i = \beta_0 + \beta_1 q_i + \epsilon_i$ を推定するとどうなるか考えてみよう。

i) 需給の連立方程式を (p, q) について解きなさい。

ii) それを用いて、(p_i, q_i) の標本平均と標本分散、標本共分散がどのような値に収束するか、調べなさい。

iii) 最小二乗推定量 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ はどのような値に収束するか？その結果についてわかることを述べなさい。

２．x,y をそれぞれスカラーの確率変数とする。定数項が 0 の線形モデル

$$y = \beta x + u$$

を考える。ただし、誤差項 u は $E(u) = 0$ であるが、x と相関をもつ可能性があり、$E(ux) = \delta$ とする（$\delta = 0$ なら x は外生変数であり、そうでなければ内生変数である）。また、$Var(x) = \sigma_x^2$ とする。x に対する適切なスカラーの操作変数 z があり、$E(z) = 0, Var(z) = \sigma_z^2$, $Cov(x, z) = \sigma_{xz}$ で、u は分散均一、つまり $E(u^2|z) = \sigma_u^2$ であるとする。このモデルから無作為標本 $(y_1, x_1, z_1), \cdots, (y_n, x_n, z_n)$ を得るものとする。

i) 最小二乗法による β の推定量を β_{OLS} として、漸近的なバイアス（$plim\, \beta_{OLS} - \beta$）がゼロとなる条件を求めなさい。

上のモデルから $n = 100$ の無作為標本が得られて、

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{100} x_i = 10 \quad , \quad \sum_{i=1}^{100} z_i = 10, \\ &\sum_{i=1}^{100} y_i x_i = 40 \quad , \quad \sum_{i=1}^{100} y_i z_i = 100\ , \ \sum_{i=1}^{100} x_i z_i = 100, \\ &\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 120 \quad , \quad \sum_{i=1}^{100} z_i^2 = 200\ , \ \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 80, \end{aligned}$$

であったとする。

ii) β の OLS 推定量 β_{OLS} を求めなさい。

iii) その結果を用いて、$\beta = 1$ を有意水準５％で両側検定しなさい。x と u の相関の可能性は無視してよい。

iv) β の 2SLS 推定量 β_{2SLS} を求めなさい。

v) x と u に相関があるかどうか、Hausman 検定によって有意水準５％で調べなさい。ただし、σ_u^2 の推定には、OLS 推定の残差二乗の平均、つまり $\hat{u}_i = y_i - x_i\beta_{OLS}$ として $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$ を用いなさい。

HP（http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/~nishiyama/jyugyo2014.html）から data2（エクセルファイル）をダウンロードして、次の問題を解きなさい。シート１，２を問３で、シート３を問４で、シート４を問５で用いる。

３．次のパネルモデルから、データ $(y_{it}, x_{it}),\ i = 1, 2, \cdots, 100,\ t = 1, 2$ が得られた。

$$y_{it} = \alpha_i + \beta x_{it} + \epsilon_{it}$$

ただし、x_{it} はすべての i, t について iid である。また、ϵ_{it} はすべての i, t について互いに独立で、$X = \{x_{it}\}_{i=1,\cdots,100,t=1,2}$、$\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1,\cdots,100}$ として、$E(\epsilon_{it}|\alpha, X) = 0$、$Var(\epsilon_{it}|\alpha, X) = \sigma^2$ であるとする。そのデータが data2(excel) のシート１，２である。シート１は $y_{it},\ i = 1, 2, \cdots, 100,\ t = 1, 2$、シート２は $x_{it},\ i = 1, 2, \cdots, 100,\ t = 1, 2$ のデータである。

(i) このデータを用いて、固定効果 α_i を考慮せずに以下のモデルに最小二乗推定を適用して $\hat{\beta}^{OLS}$ を計算しなさい。

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + \epsilon_{it}$$

(ii) このデータを用いて、β の固定効果推定値 $\hat{\beta}^{FE}$ を計算しなさい。
(iii) $\hat{\beta}^{FE}$ の分散を推定しなさい。
(iv) 帰無仮説 $\beta = 0$ を有意水準５％で両側検定しなさい。

４．data2(excel) のシート３は、以下の probit モデルから得られたデータである。

$$y_i = \begin{cases} 1, & \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \geq 0 \\ 0, & \alpha + \beta x_i + \epsilon_i < 0 \end{cases}$$

ただし、$\epsilon_i | x_i \sim iidN(0, 1)$ である。

(i) y を被説明変数、x を説明変数として、通常の線形回帰モデル $y_i = a + bx_i + u_i$ を考え、最小二乗法によって (a, b) を推定しなさい。
(ii) (i) の結果に基づき、分散不均一があっても大丈夫な分散推定量（講義ノート２、4 ページ参照）を用いて、帰無仮説 $b = 2$ を有意水準 5%で両側検定しなさい。
(iii) 二項選択の構造を考えて最尤法によって (α, β) を推定しなさい。

５．data2(excel) のシート４のデータは、AR(1) モデル $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + u_t$、$u_t \sim i.i.d.(0, \sigma^{2)}$ から発生させたデータである。

(i) y_t の平均値を求めなさい。
(ii) 自己共分散 $\gamma_j,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$ を推定しなさい。
(iii) 自己相関係数 $\rho_j,\ j = 1, 2, 3, 4$ を推定しなさい。
(iv) α_0, α_1 を推定しなさい。
(v) σ^2 を推定しなさい。
(vi) $y_{101}, y_{102}, y_{103}$ の予測値を計算しなさい。

６．期待値が 0 の AR(2) モデル

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$$

を考える。ただし、$u_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$ とする。

(i) モデルの両辺に u_t をかけて期待値を取り、$E(y_t u_t)$ を求めなさい。
(ii) 両辺にそれぞれ、$y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}$ をかけて期待値を取り、自己共分散 $\gamma_j,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$ を求めなさい。
(iii) AR(2) モデルが定常であるための条件（講義ノートの p.3 参照）を導出しなさい。