中級計量経済学・応用計量経済学宿題（１）

以下の問いに答えなさい。提出は 12 月 2 日（火）の授業時までとする。

１．$(X, Y)'$ は以下の正規分布に従っているとする。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

そのとき、$E\{(Y - a - bX)^2\}$ が最小になるように (a, b) の値を定めなさい。

２．$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ から無作為標本 (Y_i, X_i), $i = 1, 2, \cdots, n$ が得られたとする。最小二乗法によって β_0, β_1 を推定した結果を $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ とする。Y_i の予測値を $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ とし、残差を $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ とする。

(i) 最小二乗法の一次の条件を用いて、$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i$ と $\sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i$ を求めなさい。

(ii) $Y_i - \bar{Y} = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})$ と分解して、

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

が成り立つことを示しなさい。

(iii) その結果、$0 \leq R^2 \leq 1$ であることを示しなさい。

３．必要な説明変数を含めない時に生ずるバイアスについて、以下の問題に答えなさい。

(i) 本当は定数項が 0 でないにも関わらず、定数項を含めずに

$$\min_b \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 X_i)^2$$

によって最小二乗推定を行ってしまう場合を考えよう。その場合の $\hat{\beta}_1$ を求めなさい。その期待値を計算し、バイアスを求めなさい。

(ii) 本当の関係が $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \epsilon_i$, $E(\epsilon_i | X_i, Z_i) = 0$ であるにも関わらず、Z_i を含めない回帰モデル $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ を用いて、最小二乗推定を行ってしまったとする。$E(X) = \mu_X$, $E(Z) = \mu_Z$, $Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Z) = \sigma_Z^2$, $Cov(X, Z) = \sigma_{XZ}$ とする。 講義ノートに書かれているように、$Cov(X, Z) \neq 0$ なら、欠落変数バイアスが生ずる。$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ それぞれについて、バイアスを上の期待値、分散、共分散を用いて表しなさい。その結果、どのような場合にバイアスが大きくなるか述べなさい。

４．二項変数を説明変数とする回帰モデル

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i, \ i = 1, \cdots, n$$

において最小二乗推定量を $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ とする。$\bar{Y}^0$ と $\bar{Y}^1$ をそれぞれ、D が 0 の個体のデータのみから計算した Y の平均、D が 1 の個体のデータのみから計算した Y の平均とする。そのとき、$\hat{\beta}_1 = \bar{Y}^1 - \bar{Y}^0$ が成り立つことを示しなさい。

５．HP（http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/~nishiyama/jyugyo2014.html）からデータ１（エクセルファイル）をダウンロードして、以下の計算をしなさい。

(i) Y_1 を被説明変数、X を説明変数として、最小二乗法によって係数を推定しなさい。

(ii) 決定係数を求めなさい。

(iii) 回帰直線の傾きが 2 であるかどうか、有意水準 5%で t 検定によって調べなさい。ただし、$\hat{V}$ として、講義ノートの（18）式（分散均一の場合の標準誤差）を用いなさい。

(iv) $\hat{V}$ として、講義ノートの（16）式（分散不均一の場合の標準誤差）を用いて、上と同じ検定をしなさい。

(v) Y_1 を Y_2 で置き換えて、上の (i), (iii), (iv) を解きなさい。

(vi) (Y_1, X) および (Y_2, X) の散布図を描いて、以上の結果をどのように解釈すべきか、述べなさい。

(vii) Y_1 を被説明変数とする回帰において、X が 3 だけ変化した時の Y_1 の変化量の 95 %信頼区間を求めなさい。