

中級・応用計量経済学 2012 年度 中間試験 解答例

吉村 有博*

今回の試験は基本的に講義ノートを参照すれば分かるため、解答例は略解に留める。採点の便宜上、最高点は 80 点とする。

- (i) (10 点) 傾き β の OLS 推定量の漸近バイアスは、大数の法則と誤差項の期待値はゼロの仮定より、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{OLS} - \beta &= \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x}) u_i}{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} \\ &\xrightarrow{p} \frac{E(xu)}{Var(x)} = \frac{\delta}{\sigma_x^2} (\neq 0).\end{aligned}$$

- (ii) (10 点) 操作変数 z が満たすべき条件は以下の関連性と外生性、つまり、

$$\begin{aligned}Corr(z, x) &\neq 0 && \text{ : 関連性} \\ Corr(z, u) &= 0 && \text{ : 外生性}\end{aligned}$$

である。^{*1}

- (iii) (10 点) 講義ノートより、 β の 2SLS 推定量は以下である。導出過程については講義ノートを参照。

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{2SLS} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z}) y_i}{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z}) x_i}.\end{aligned}\tag{1}$$

- (iv) (20 点) 一致性は、(1) 式と大数の法則と誤差項の期待値はゼロの仮定、そして操作変数の条件より、

$$\hat{\beta}_{2SLS} - \beta = \frac{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z}) u_i}{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z}) x_i}\tag{2}$$

$$\xrightarrow{p} \frac{E(zu)}{Cov(z, x)} = 0.\tag{3}$$

漸近正規性は、(2) 式の両辺を \sqrt{n} で膨らませて、中心極限定理とスラツキーの補題より、

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2SLS} - \beta) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i (z_i - \bar{z}) u_i}{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z}) x_i} \\ &\xrightarrow{d} \frac{1}{Cov(z, x)} \times N(0, E((z - E(z))^2 u^2)) \\ &\sim N\left(0, \frac{E((z - E(z))^2 u^2)}{(Cov(z, x))^2}\right).\end{aligned}$$

* 経済学研究科博士後期課程 2 年

*1 ここは、共分散を用いた条件でも必要十分である。

漸近分散の一致推定量は、分散と共分散を標本対応で置き換え、誤差項を残差で置き換えたもの、つまり

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{2SLS}}^2 = \frac{\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z})^2 \hat{u}_i^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_i (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})\right)^2}$$

である。ただし、残差は $\hat{u}_i = y_i - \hat{\alpha}_{2SLS} - \hat{\beta}_{2SLS}x_i$ として、切片と傾きの一致推定量（ここでは 2SLS 推定量）を用いたものである。^{*2}

- (v) (10 点) (1) 式に値を代入するだけ。 $\hat{\beta}_{2SLS} = 2$ を得る。
 (vi) (10 点) 帰無仮説： $\beta = 1$ を有意水準 5% で両側検定するために、t 値を計算する。t 値^{*3}は、

$$t = \frac{\hat{\beta}_{2SLS} - 1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{2SLS}}^2}{n}}} = 10\sqrt{2} \approx 14.142 > 1.96.$$

ゆえに、帰無仮説を有意水準 5% で棄却する。

- (vii) (10 点) 講義ノートの記述が詳細なので、そちらを参照。

^{*2} 本問でこの推定量の一致性の証明は問われていないが、難しくはないので、興味ある方は Hayashi (2000) "Econometrics" pp.115, 210 などを参照されたい。

^{*3} ここで、分母の標準誤差を \sqrt{n} で割ることを忘れないよう注意。