

# 中級・応用計量経済学 宿題 1 解答例

吉村 有博\*

2012年12月7日

1. 目的関数は平均二乗誤差 (Mean squared error) であることに注意して、これを  $MSE(a, b) \equiv E(Y - a - bX)^2$  と定義する。最適解の必要条件として一階の条件を求めると、(更に微分操作と積分操作の順序交換を認めれば)

$$\begin{aligned}\frac{\partial MSE(a, b)}{\partial a} &= -2E(Y - a^* - b^*X) = 0, \\ \frac{\partial MSE(a, b)}{\partial b} &= -2E\{(Y - a^* - b^*X)X\} = 0,\end{aligned}$$

を得る。最適解の十分条件 (二階の条件) も正より、上式を満たす  $a^*, b^*$  が目的関数の最小化解になる。上の条件を  $a^*, b^*$  について整理すれば、

$$\begin{aligned}a^* &= E(Y) - E(X)b, \\ b^* &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)},\end{aligned}\tag{1}$$

を得る。この式に、設問で与えられた  $(X, Y)$  のパラメータを代入することで、 $(a^*, b^*) = (3/2, 1/2)$  を得る。<sup>\*1</sup>

2. まず、講義ノート 2 のページ 2 にある「最小二乗法のための仮定」を置く。また表記の簡略化のため、添え字のない  $X, u$  で、 $X'_i, u_i$  を全てのサンプル  $i = 1, \dots, n$  で縦に並べた、それぞれ  $n \times k$  行列、 $n \times 1$  ベクトルとする。

(i) 予測のバイアスは、繰り返し期待値の法則と仮定 1 より、

$$\begin{aligned}E(\hat{y}_i - y_i) &= E[y'X(X'X)^{-1}X_i - (\beta'X_i + u_i)] \\ &= E[u'X(X'X)^{-1}X_i - u_i] \\ &= E[E(u'|X)X(X'X)^{-1}X_i - E(u_i|X)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

従って、最小二乗法による予測のバイアスはない。

- (ii) まず、無作為標本 (いわゆる i.i.d.) と仮定 1 の下では、条件付分散均一  $E(u_i^2|X_i) = \sigma^2$  と、 $E[uu'|X] = \sigma^2 I$  は同値である<sup>\*2</sup>。ここで、 $I$  は単位行列である。従って、ここでは後者の条件を用いて解答を示す。

\* TA: 経済学研究科博士後期課程 2 年

\*1 実は、(1) 式で得られた  $a^*, b^*$  は、 $Y$  を定数と  $X$  が張る空間へ射影した際の射影係数である。よって、 $(X, Y)$  の分布から大きさ  $n$  の無作為標本を得た場合には、 $a^*, b^*$  の標本対応は  $Y$  を定数と  $X$  に回帰した際の最小二乗推定量に相当することに注意。

\*2 詳しくは、Hayashi (2000) "Econometrics" の p.12-13 などを参照。

今、 $\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'u$  と書ける。また、最小二乗推定量の不偏性より、 $E(\hat{y}_i|X) = \beta'X_i$  である。よって、予測の  $X$  に関する条件付分散は、

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{y}_i|X) &\equiv E\{[\hat{y}_i - E(\hat{y}_i|X)]^2|X\} \\ &= E\{[(\hat{\beta} - \beta)'X_i]^2|X\} \\ &= X_i'E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'|X]X_i \\ &= X_i'(X'X)^{-1}X'E[uu'|X]X(X'X)^{-1}X_i \\ &= \sigma^2 X_i'(X'X)^{-1}X_i.\end{aligned}$$

(iii) 最小二乗推定量は一階の条件 (講義ノート 2 の (4) 式) を満たすため、明らかに  $\sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i = 0$ 。つまり、説明変数と最小二乗残差は直交している。

(iv) まず、決定係数の分子は、足し引きによる分解により、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}_i) - (y_i - \hat{y}_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i) + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i - 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i) \hat{u}_i\end{aligned}$$

と書けるので、 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i) \hat{u}_i = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$  を示せば結論を得る。ここで、説明変数ベクトルの第 1 要素は 1 ゆえに (iii) は  $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0$  も意味することに注意。従って、 $y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$  と (iii) の直交条件により、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i) \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i + \hat{u}_i) \hat{u}_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \hat{u}_i + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &= \hat{\beta}' \sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2.\end{aligned}$$

### 3. \*3

(i) 定数項を含めた最小二乗推定を行うと、結果は、切片 = 1.9507、傾き = 2.9815。

(ii) 決定係数は、 $R^2 = 0.8969$ 。

(iii) 以下、t 検定は全て両側検定で行うとする。

均一分散に対応した標準誤差を用いると、 $t = \frac{\hat{\beta}-2}{SE(\hat{\beta})} = 9.7115$  を得て、有意水準 5 % で帰無仮説を棄却する。

(iv) 不均一分散に対応した標準誤差を用いると、 $t = \frac{\hat{\beta}-2}{SE(\hat{\beta})} = 11.1730$  を得て、有意水準 5 % で帰無仮説を棄却する。

(v) 回帰係数の推定値は、切片 = 2.1027、傾き = 3.1240 を得る。

均一分散に対応した標準誤差を用いた t 値は 0.9659 で、これは 5 % で帰無仮説を棄却しない。一方、不均一分散に対応した t 値は 5.6868 で、こちらは 5 % で帰無仮説を棄却する。

\*3 数値計算ソフトによっては各種の計算アルゴリズムが多少異なるが、計算結果の多少のずれは採点には影響しない。

(vi) 散布図を描いてみると(図1)、回帰関数はどちらについても線形的で、Y1の誤差項には均一分散性、Y2の誤差項には不均一分散性が見受けられる。特に(Y2, X)のプロットでは、Xが0付近の値を取る時、Y2の変動が非常に大きいことが見てとれる。係数の推定結果がどちらのデータの場合も切片はおよそ2で、傾きはおよそ3であったことを考えれば、「真の傾きは2である」という帰無仮説は、自然に考えれば棄却されることが期待される\*4。しかしながら(v)の結果からも分かるように、真の構造が不均一分散であるにもかかわらず、「真は均一分散だ」という間違っただ想定の下で標準誤差を推定してしまうと、その推定量を用いたt検定は、棄却されるべき仮説を棄却できないという問題を引き起こす。

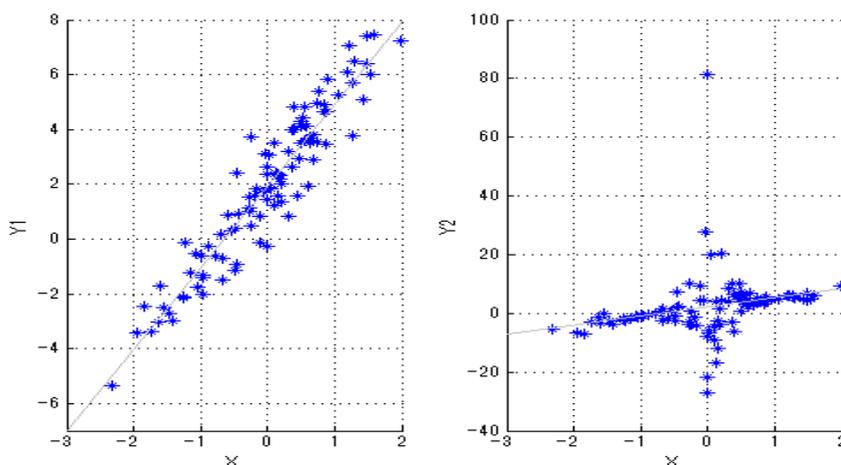


図1 散布図と最小二乗回帰線: 左は(Y1, X), 右は(Y2, X)

こうした問題を回避する方法の一つが、不均一分散に対応した標準誤差(不均一分散ロバスト推定量と呼ばれる)をt検定に適用することである。(iii), (iv)の結果からも、仮に真が均一分散の際に不均一分散ロバスト推定量を適用したとしても、上のような問題は起こりにくいことが分かる。応用では、まず散布図を描いてみて、誤差項に不均一分散性が疑われるかどうかを確認し、もしそれが疑われる場合には、t検定には不均一分散ロバスト推定量を用いるべきである。

\*4 実際、このY1, Y2のデータは、切片2、傾き3という線形の回帰関数で、誤差項の分散をそれぞれ均一と不均一にしたモデルから生成されたものである。